Origami: Geometria con la carta (II)

E' possibile mostrare (cfr. Geretschlager, 1995) che ognuna delle procedure **E1 - E5** della geometria euclidea, può essere sostituita da combinazioni delle procedure **O1 - O8** della geometria origami. Infatti abbiamo:

E1 E1 corrisponde ad O4;

E2 Non è possibile ottenere una circonferenza con piegature. Ma possiamo sicuramente assumerla come determinata conoscendone il centro O ed il raggio r, e potendone determinare un qualsiasi numero di punti e tangenti nei seguenti modi:

a) Sia O il centro ed r = AB il raggio della circonferenza (fig. 1a). E' possibile piegare A su O (usando la procedura **O5**) e questo porta il punto B su un punto B' (simmetrico di B rispetto a t) e quindi r = OB' in quanto simmetrico di AB rispetto a t (fig. 1b).

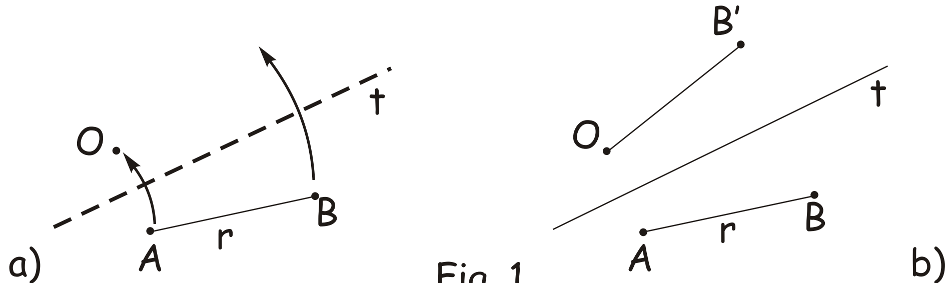

Fig. 1

b) Data una retta l passante per O, il raggio r = OB' può essere piegato (tramite **O2**) su questa (fig. 2a) per ottenere il punto P della circonferenza sulla retta del diametro l (fig. 2b). E' possibile ottenere anche il punto diametralmente opposto a P.

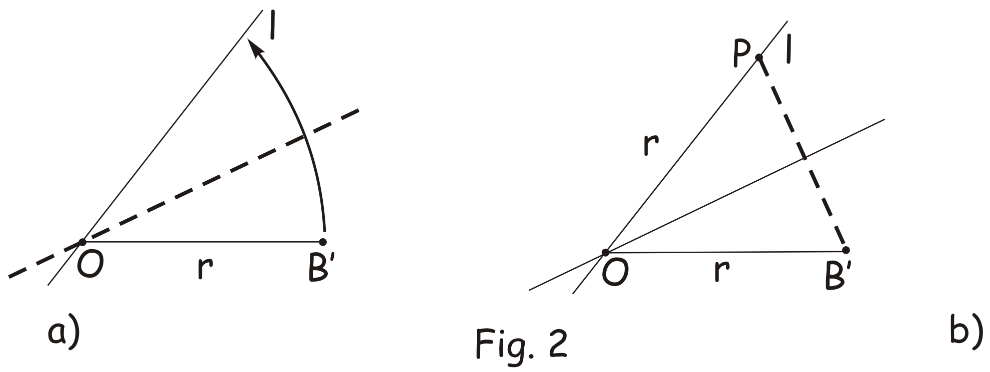

Fig. 2

c) Piegando (con la procedura **O6**) l su se stessa per P, (fig. 3a) costruiamo la retta t per P perpendicolare al diametro (fig. 3b) che in pratica risulta essere la tangente alla circonferenza in P.

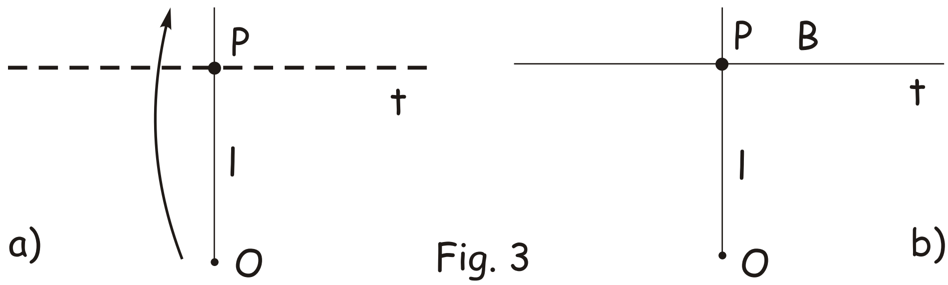

Fig. 3

E3 E3 corrisponde ad O1;

E4 Dato una circonferenza (centro O e raggio OP) ed una retta l, è possibile trovare i loro punti di intersezione piegando (fig. 4a), sovrapponendo prima P ad l in P' e successivamente P a P'' in modo che le pieghe passino per O (fig. 4b). Ciò è possibile in base alla procedura **O8**, in quanto trovare i punti di intersezione di una circonferenza con una retta è equivalente a trovare le due tangenti s e t per O ad una parabola di fuoco P e direttrice l. P' e P'' stanno sulla retta l e sulla circonferenza in quanto la loro distanza da O è uguale al raggio OP. Quindi P' è P'' sono le intersezioni cercate.

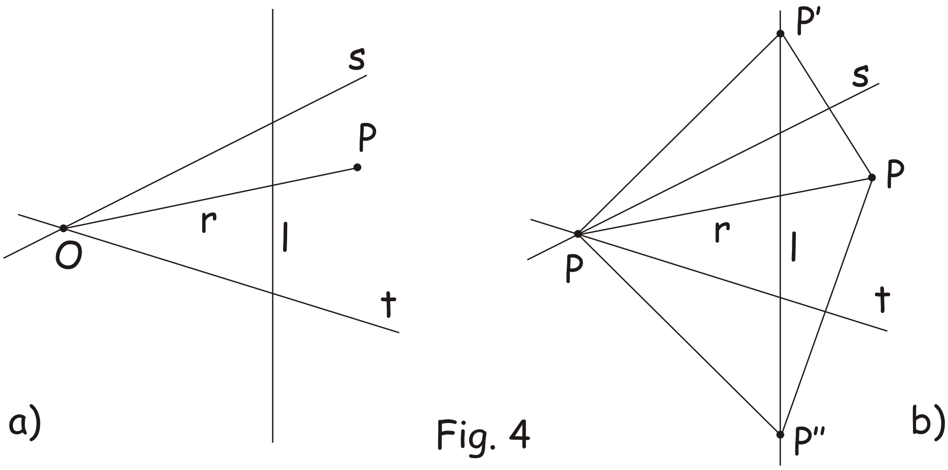

Fig. 4

E5 La circonferenza, nella geometria origami, è noto solo attraverso la conoscenza di determinati punti e tangenti, non è quindi possibile trovare direttamente le intersezioni tra due circonferenze. E' però possibile trovare l'asse radicale delle due circonferenze riconducendo perciò il problema a quello precedente cioè ad **E4**. Per trovare l'asse radicale procediamo nel seguente modo (fig. 5):

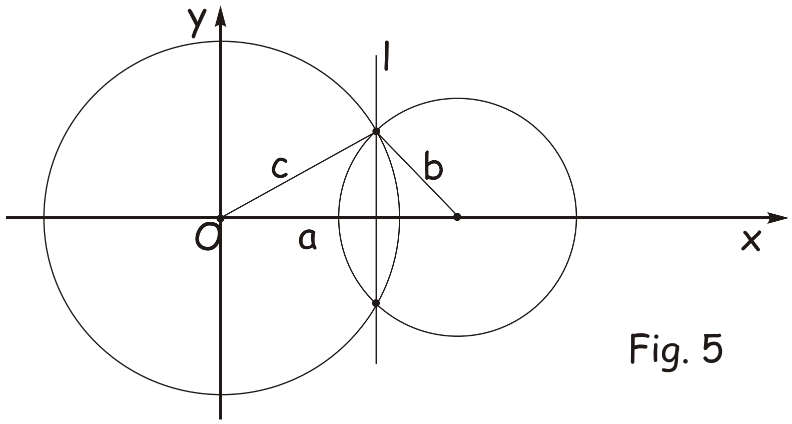

Fig. 5

Le due circonferenze, rispetto al sistema di coordinate XY, avranno equazione:

C_1) $x^2 + y^2 = c^2$ e C_2) $(x - a)^2 + y^2 = b^2$

il loro asse radicale avrà allora equazione:

$$x^2 + y^2 - c^2 = x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - b^2$$

cioè:

$$x = (a^2 - b^2 + c^2)/2a$$

I punti comuni alle due circonferenze si trovano quindi sulla perpendicolare alla congiungente i centri che dista dal centro della circonferenza di raggio c di $x = (a^2 - b^2 + c^2) / 2a$.

Questa retta può essere trovata con le procedure origami nei seguenti 4 passaggi (vedi anche la risposta agli esercizi alla fine):

a) Costruire il triangolo rettangolo avente i cateti di lunghezza a e c usando le procedure **O4-O6-O8**. La lunghezza dell'ipotenusa è allora $\sqrt{a^2 + c^2}$ (fig. 6a).

b) Costruire il triangolo rettangolo avente l'ipotenusa $\sqrt{a^2 + c^2}$ e un cateto b usando le procedure **O4-O6-O8-O4**.
La lunghezza dell'altro cateto è allora $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ (fig. 6b).

c) Costruire il triangolo avente i lati lunghi 1 e $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ con **O4**.
Poi costruire il triangolo simile con un lato lungo $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ con **O2**-**O4**-**O6**.
Il lato corrispondente al lato lungo ha lunghezza $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ (fig. 6c).

d) Costruire il triangolo avente i lati lunghi 2a e $a^2 - b^2 + c^2$ con **O4**.
Poi costruire il triangolo simile con un lato lungo 1 con **O4**-**O6**.
Il lato corrispondente al lato $a^2 - b^2 + c^2$ ha lunghezza $(a^2 - b^2 + c^2)/2a$, misura cercata (fig. 6d).

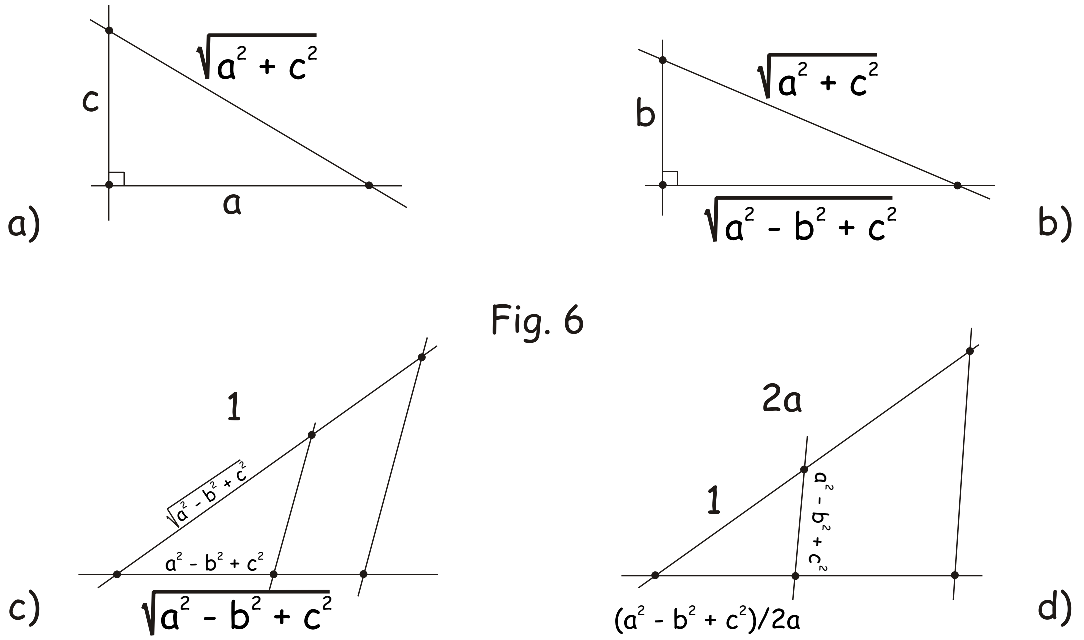

Fig. 6

Si può pertanto concludere che qualunque costruzione che può essere fatta con metodi euclidei, può essere ottenuta con metodi origami. E' possibile anche mostrare (cfr. Geretschlager, 1995) che ognuna delle procedure **O1**-**O8** della geometria origami, può essere sostituita da combinazioni delle procedure E1-E5 della geometria euclidea. Infatti abbiamo:

O1 O1 corrisponde ad E3;

O4 O4 corrisponde ad E1;

O2,**O3**,**O5**,**O6**, sono costruzioni notoriamente possibili con metodi euclidei;

O7 Data una retta d ed un punto F, per costruire una tangente alla parabola di fuoco F e direttrice d, si procede nel seguente modo (fig. 7):

Prendo un punto qualunque G sulla direttrice d, costruisco l'asse t (**E2**,**E5**,**E1**) del segmento GF che risulterà essere tangente alla parabola nel suo punto T (**E4**, **E5**, **E1** , **E3**).

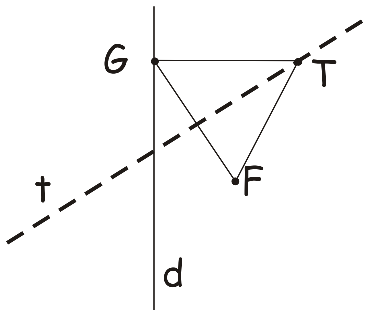

Fig. 7

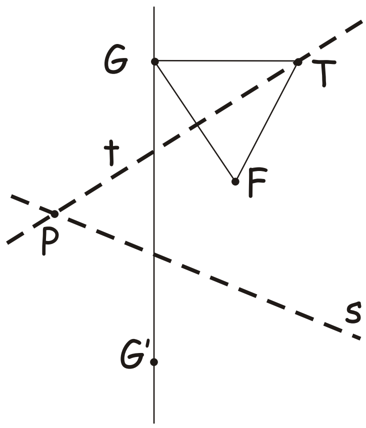

Fig. 8

O8 Data una retta d e due punti F e P, per costruire la tangente per P alla parabola di fuoco F e direttrice d, si procede nel seguente modo (fig. 8) Costruisco la circonferenza di centro P e raggio PF e trovo le intersezioni G e G' di questa con la retta d (**E2**, **E4**). L'asse t (**E2,E5,E1**) del segmento GF risulta essere la tangente per P alla parabola, T è il punto di tangenza (**E4, E5, E1, E3**). Lo stesso per ottenere l'altra tangente s.

Quindi ogni costruzione che può essere fatta con procedure origami (O1..O8) può anche essere ottenuta con metodi euclidei.

Per quanto detto prima perciò i due insiemi di procedure sono equivalenti. La procedura origami **O9**, aggiunge però altre costruzioni geometriche all'insieme delle possibile costruzioni generate da questi insiemi equivalenti. Quindi l'insieme delle costruzioni euclidee è un sottoinsieme proprio dell'insieme che può essere generato con metodi origami. Nel sistema euclideo si possono risolvere problemi di primo e secondo grado. E' un sistema geometrico chiuso: non è possibile svilupparlo introducendo nuove procedure che risolvano problemi di grado superiore al secondo. Il sistema geometrico della geometria origami, invece, è un sistema aperto: non essendo vincolato da strumenti, la scoperta di nuove pieghe può espandere il sistema verso la risoluzione di problemi d'ordine superiore.

Le procedure per la costruzione di un triangolo rettangolo avente:
a) i cateti congruenti rispettivamente a due segmenti dati AB e BC (fig. 9a);

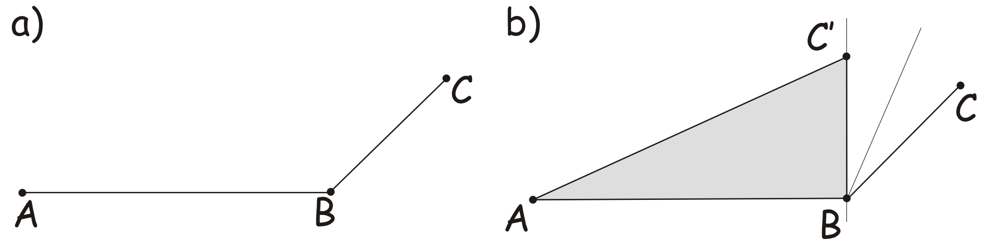

Fig. 9

Retta AB (**O4**) - Perpendicolare ad AB per B (**O6**) Portare C su a facendo perno su B (**O8**) - Retta AC' (**O4**) (fig. 9b).

b) l'ipotenusa ed un cateto rispettivamente congruenti a due segmenti dati AB e BC (fig. 10a);

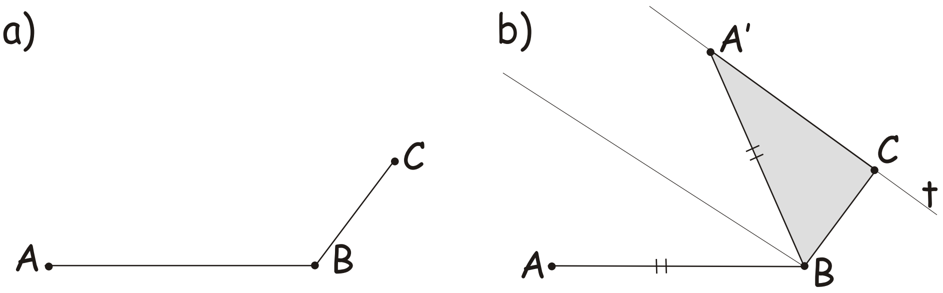

Fig. 10

Retta BC (**O4**) - Perpendicolare t a BC per C (**O6**) - A su t facendo perno su B (**O8**) - Retta A'B (**O4**) (fig. 10b).

c) l'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa rispettivamente congruenti a due segmenti dati AB e PH (fig. 11a);

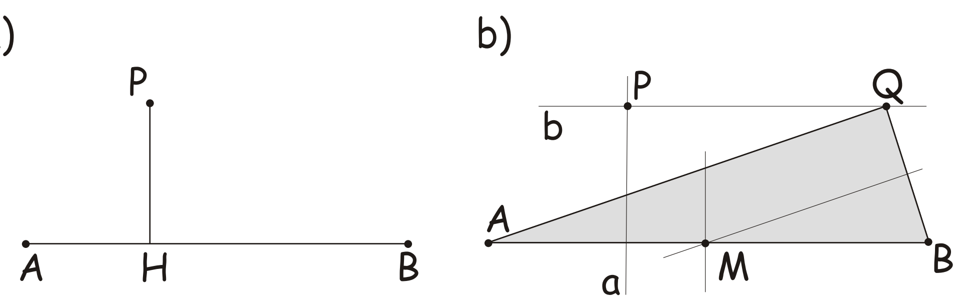

Fig. 11

Punto medio M di AB (**O5**) - Perpendicolare a ad AB per P (**O6**) - Perpendicolare b ad a per P (**O6**) - Facendo perno su M, B sulla retta b (**O8**) - Retta BQ (**O4**) - Retta AQ (**O4**) (fig. 11b).